

扩展剑桥模型参数的优化选择及其应用

陈立宏¹, 陈祖煜²

(1.清华大学 土木水利工程学院岩土所, 北京 100084; 2.中国水利水电科学研究院, 北京 100044)

摘 要: 在有限元计算中合理选取土的本构关系与模型参数, 对于计算成果的可靠性是十分重要的。剑桥模型是一个应用广泛的弹塑性模型, 其参数一般是通过室内试验来确定的。通过建立扩展剑桥模型在三轴条件下的弹塑性本构关系的表达式, 并以此为依据, 利用数值模拟常规三轴试验和单向压缩试验过程并利用正反分析技术优化求解剑桥模型参数, 在小浪底大坝固结计算的应用中证明了这种方法的合理性与实用性。

关 键 词: 剑桥模型; 三轴试验; 固结

中图分类号: TB 115; TU 441 **文件标识码:** A

Identification of soil parameters of extended Cambridge model and its application to Xiaolangdi project

CHEN Li-hong¹, CHEN Zu-yu²

(1. Civil and Hydraulic Engineering School, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

2. China Institute of Water Resources and Hydropower Research, Beijing 100044, China)

Abstract: It is important to identify the soil parameters while using finite elements method. Cambridge model is a widely used soil constitutive model in practice, whose parameters always determined by conventional laboratory test results. The expression of extended Cambridge model under triaxial test is presented. And simulation computer program is developed to figure out the optimum parameters. The application to Xiaolangdi project shows the rationality and practicability of this program.

Key words: Cambridge model; triaxial test; consolidation

1 概 述

有限元法的突出优点是适于处理非线性、非均质和复杂边界等问题, 而土体应力、固结变形问题分析恰恰就存在这些困难问题。自从 1966 年美国 Clough 和 Woodward 首先用有限元法分析土坝以来, 有限元法在岩土工程中的应用发展迅速, 并取得了巨大进展。

选用合适的土的本构关系与模型参数, 对于计算成果的可靠性, 是十分重要的。剑桥模型是一个应用广泛的弹塑性模型。本文将介绍按扩展剑桥模型建立的在三轴条件下的弹塑性本构关系的表达式, 并以此为依据, 通过进行常规三轴试验和单向压缩试验, 并利用正反分析技术求解优化剑桥模型参数。

2 扩展剑桥模型

土的有效应力弹塑性本构关系, 即应力增量 $\dot{\sigma}'$ 与应变增量 $\dot{\epsilon}$ 的关系可用下式^[1]表达

$$\{\dot{\sigma}'\} = [C^{\text{ep}}] \{\dot{\epsilon}\} \quad (1)$$

式中 $[C^{\text{ep}}]$ 为弹塑性矩阵。

$$[C^{\text{ep}}] = [C^e] - \frac{[C^e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T [C^e]}{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma'} \right\}^T [C^e] \left\{ \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \right\} + A} \quad (2)$$

式中 $[C^e]$ 为弹性矩阵; f 为屈服函数; g 为势函数。

在常规的计算中, 可采用相关联流动法则, 故取 $g = f$, A 为表示硬化规律的参数。图 1 为修正剑桥模型, 它采用的是塑性体积应变的硬化规律, 相关联的流动法则 (即 $g = f$) 和具有椭圆轨迹的屈服函

数, 如式(3)所示

$$f = f(p', q) = p'(1 + \frac{\eta^2}{M^2}) - p'_0 \quad (3)$$

式中 应力不变量 p' 和 q 以最大和最小主应力 σ'_1 、 σ'_3 表示, 分别为

$$p' = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3}{3} \quad (4)$$

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2} \quad (5)$$

η 和 M 的定义也可参见图 1。 p'_0 为屈服轨迹与 p' 轴相交时的值。剑桥模型是对正常固结重塑粘土进行三轴试验得到的。为了将模型用于土石坝中经过碾压的填筑土, 邓肯在以下三个方面做了扩展^[2]:

(1) 对土的强度包线的处理。剑桥模型假定正常固结土的强度包线在 p' - q 平面上是通过原点的。但填筑土具有凝聚力, 邓肯建议采用强度包线不通过原点, 而在 p' 轴上相交于离原点距离为 p'_r (见图 2), 因此, 上面推导的所有公式中有关 p' 的量都应加上 p'_r 的值。

(2) 对等向压缩曲线的处理。邓肯认为等向压缩曲线的斜率 λ 不是常数, 可随 p' 改变而改变。因此, 输入的 λ 是一系列数值, 在计算时通过内插来决定处于某一应力状态的 λ 值。

(3) 对土的泊桑比的处理。邓肯认为泊桑比 μ 也随 p' 改变而改变。因此, 也需输入一组 μ 和 p' 的数值, 供计算时内插取值, 这样可更好地反映土的应力应变关系。

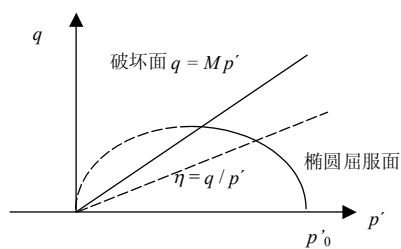


图 1 修正剑桥模型示意图

Fig.1 p - q curve of modified Cambridge model

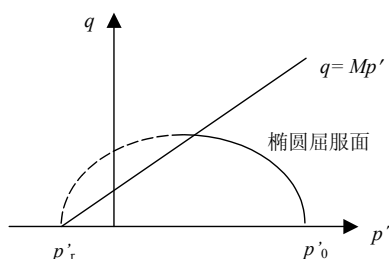


图 2 邓肯对剑桥模型的修正

Fig.2 Cambridge model modified by Duncan

3 三轴条件下剑桥模型的本构关系

以下推导三轴和单向压缩条件下的应力和应变的关系, 其目的是对这些试验的曲线进行参数拟合, 从而获得具有代表性的弹塑性本构关系参数, 用于有限元分析。

对于轴对称的三轴情况, 有

$$p' = \frac{1}{3}(\sigma'_1 + 2\sigma'_3) \quad (6)$$

$$q = \sigma'_1 - \sigma'_3 \quad (7)$$

剑桥理论采用体应变硬化模式, 其屈服函数可表示为

$$f(p', q) = H(\Delta e^p) \quad (8)$$

式中
$$H(\Delta e^p) = \exp\left(\frac{\Delta e^p}{\lambda - k}\right) \quad (9)$$

$$\Delta e^p = e_0 - e - k \ln \frac{p'}{p'_0} \quad (10)$$

相应增量为 dp' 和 dq 时有

$$df = \frac{\partial f}{\partial p'} dp' + \frac{\partial f}{\partial q} dq = \frac{\partial H}{\partial (\Delta e^p)} d(\Delta e^p) = \frac{1}{\lambda - k} f d(\Delta e^p) \quad (11)$$

$$\text{而 } d(\Delta e^p) = (1+e)\dot{\epsilon}_v^p = (1+e)d\lambda \frac{\partial f}{\partial p'} \quad (12)$$

$$\text{故有 } A = \frac{df}{d\lambda} = \frac{1+e}{\lambda - k} f \frac{\partial f}{\partial p'} \quad (13)$$

式中 $d\lambda$ 为非负值的函数; e 为孔隙比; λ 为等向压缩曲线的斜率; k 为等向回弹曲线的斜率。

故有

$$\frac{\partial f}{\partial p'} = 1 - \frac{q^2}{M^2} \frac{1}{p'^2} \quad (14)$$

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{2q}{M^2 p'} \quad (15)$$

应用上述关系, 可以建立三轴条件下的应力应变关系。令

$$\{\dot{\epsilon}\}^T = (\dot{\epsilon}_v, \dot{\epsilon}_s) \quad (16)$$

$$\{\dot{\sigma}'\}^T = (\dot{p}', \dot{q}) \quad (17)$$

式中 $\dot{\epsilon}_v$ 为体积应变增量, $\dot{\epsilon}_s$ 为剪应变增量。此时

式(2)中 $[C^e]$ 为

$$[C^e] = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (18)$$

式中 B 为体积模量, G 为剪切模量, 对三轴固结不排水情况, 轴向应力和径向应力与相应的应变之间应满足如下关系

$$\begin{Bmatrix} p' \\ q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_3 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

由于

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_v \\ \varepsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_3 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

故有

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}'_1 \\ \dot{\sigma}'_3 \end{Bmatrix} = [C_t^{\text{ep}}] \begin{Bmatrix} \dot{\varepsilon}_1 \\ \dot{\varepsilon}_3 \end{Bmatrix} \quad (21)$$

其中

$$[C_t^{\text{ep}}] = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} [C^{\text{ep}}] \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \quad (22)$$

可以认为单向压缩是轴对称三轴试验的一种特殊情况 ($\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0$), 采用上述方法同样可以得到类似的结果。

4 模型参数求解

应用上述关系式, 可以确定某一个三轴试验特定应力路径下应力和应变的关系。把这个关系和实验室实测的关系对比, 即可了解所选用的剑桥模型参数是否合适。根据上述表达式, 可以编制单向固结和常规三轴试验沿着这两条不同的应力路径加载的应力应变计算程序, 通过计算机的图形显示功能来对比室内试验结果和数值模拟结果, 最小化两者之间的差距来进行参数拟合和调整工作。

下面以小浪底大坝心墙土和高塑性土为例说明如何采用常规的单向和三轴试验成果整理和拟合修正的剑桥模型的参数。首先根据表1、2介绍的方法和公式 (表中的公式大多可以根据模型参数的定义获得), 利用单向固结和常规三轴试验的数据初步确定参数。其中 M 和 p_r' 可以根据粘聚力 c 和内摩擦角 ϕ 确定。

$$M = \frac{6 \sin \phi}{3 - \sin \phi}; \quad p_r' = \frac{c}{\tan \phi} \quad (23)$$

然后利用扩展剑桥模型的本构关系, 根据前面的推导编制沿着三轴试验和单向固结两条不同的应力路径加载的计算机程序。通过调整参数 λ 、 κ 、和泊松比 μ , 使得通过这些参数计算所得的结果与试验结果最为接近, 从而获得所需的最能代表土的特性的模型参数。

表1 剑桥模型参数的初步选取—小浪底高塑性土 p' - λ 关系的确定

Table 1 Initial calculation of parameters—determination of p' - λ of high plastic clay of Xiaolangdi Dam

σ_3 /kPa	$\sigma_1 - \sigma_3$ /kPa	ε_v	p' /kPa	η	P'_0 /kPa	$\Delta P'_0$ /kPa	$\Delta P'_{0\text{avg}}$ /kPa	λ
200	250	0.01	283	0.601	310	110	255	0.041 4
500	420	0.017	640	0.543	647	147	573	0.119
800	690	0.022	1 030	0.593	1 034	234	917	0.154

$$p' = \sigma_3 + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{3}; \quad \eta = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{p' + p'_r}; \quad P'_0 = \left(1 + \frac{\eta^2}{M^2}\right)(p' + p'_r) - p'_r;$$

$$\Delta P'_0 = P'_0 - \sigma_3; \quad P'_{0\text{avg}} = \frac{P'_0 + \sigma_3}{2}; \quad \lambda = \frac{P'_{0\text{avg}}}{\Delta P'_0}(1 + e_i)\varepsilon_v$$

表2 剑桥模型参数的初步选取—高塑性土 p' - μ 关系的确定

Table 2 Initial calculation of parameters—determination of p' - μ of high plastic clay of Xiaolangdi Dam

E_i /kPa	p' /kPa	B /kPa	μ	公式	曲线类型
				$p' = \sigma_3$	$\kappa = \frac{\Delta e}{\Delta \ln p'}$ 等向固结回弹曲线
2 250	200	14 944	0.475	$B = \frac{1 + e_i}{k p'}$	$\kappa \approx \frac{0.8 \Delta e}{\Delta \ln \sigma'_v} \left(\frac{1 + 2k_0}{3} \right)$ 一维固结回弹曲线
3 600	500	77 572	0.492	$\mu = \frac{1}{2} - \frac{E_i}{6B}$	$\kappa = 0.9 \lambda_{\min}$ 或 $\kappa = 0.1 \lambda_{nc}$ (正常固结) *
5 000	800	188 457	0.495	$e_i = 0.787$ 初始孔隙比	$\kappa = 0.03$

*在没有相应试验资料时使用的经验公式^[2]

最后获得的小浪底大坝心墙土和防渗墙顶的高塑性土的参数见表3, 这些也是最后应用于有限元固结计算的参数, 其试验结果与拟合曲线见图3至图6。

表 3 拟合后的心墙土和高塑性土的剑桥模型参数

Table 3 Final parameters of core clay and high plastic clay

参 数	材 料					
	心墙粘土			高塑粘土		
$\rho_d / \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	1.63			1.55		
$S_r / \%$	87.64			90.0		
G	2.77			2.73		
e	0.787			0.674		
M	0.571			0.664		
P_r / kPa	136.2			586.8		
κ	0.001			0.009		
P_0 / kPa	283	640	1 030	822	1 380	1 956
λ	0.020	0.030	0.038	0.034	0.046	0.047
P' / kPa	200	500	800	400	800	1 200
μ	0.374	0.419	0.430	0.254	0.264	0.303

图中实线为实测曲线, 虚线是计算拟合的曲线。从图中可以看出, 不论是三轴试验还是单向压缩试验, 模拟曲线和试验曲线总体趋势吻合较好, 说明由试验确定的剑桥模型参数能够较好的反映土体的力学特征, 可以作为有限元计算的依据。而应力应变和固结有限元计算结果^[3]的合理可靠也反过来证明了选用参数的合理性。

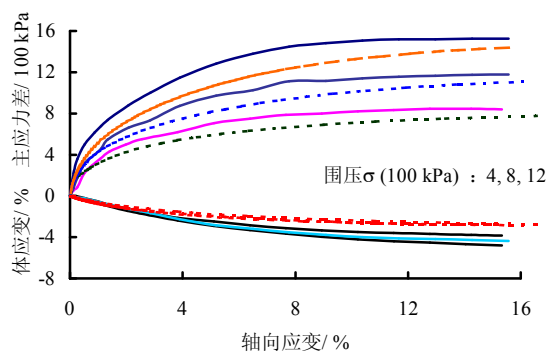


图 3 小浪底心墙粘土三轴试验与数值拟合结果
Fig.3 Results of triaxial test and simulation (core clay)

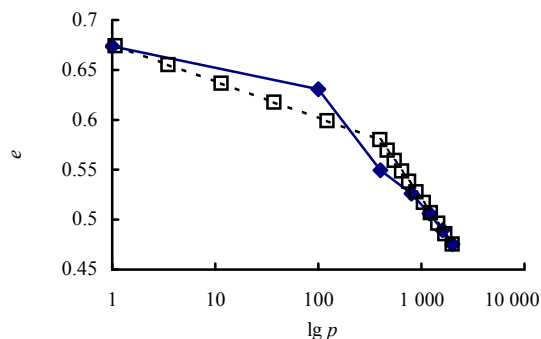


图 4 小浪底心墙粘土单向压缩试验与数值拟合结果
Fig.4 Results of 1D consolidation test and simulation (core clay)

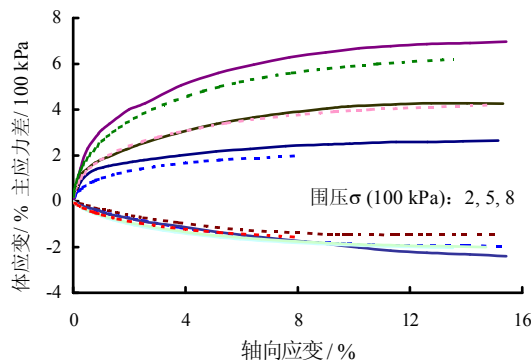


图 5 小浪底高塑性土三轴试验与数值拟合结果
Fig.5 Results of triaxial test and simulation (High plastic clay)

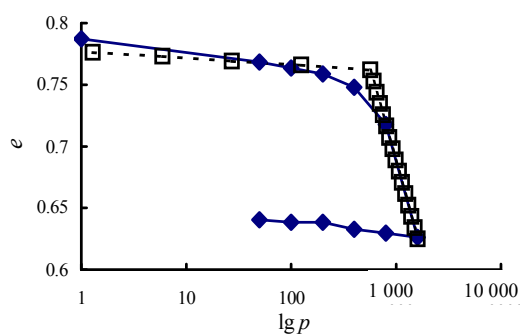


图6 小浪底高塑性土单向压缩三轴试验与数值拟合结果
Fig.6 1D compression results and simulated results of high plastic clay

5 结 语

本构模型的参数是否合理直接影响有限元计算成果的可靠性和可信度。本文通过模拟两条不同的应力路径, 室内三轴试验和单向压缩试验, 获得合理可靠的模型参数。该方法简单易行, 而且需要的数据来自室内常规试验, 容易获得。两种应力路径的同时拟合提高了参数的可靠性。

参 考 文 献

- [1] 黄文熙. 土的工程性质[M]. 水利水电出版社, 1983.
- [2] D'orazio T B, Sunami S, Duncan J M. CON2D: A finite element computer program for analysis of consolidation [R]. Report No. UCB/GT/ 81-01, University of California. 1981.
- [3] 中国水利水电科学院等. 黄河小浪底水利枢纽工程斜心墙堆石坝应力应变和固结分析研究[R]. 报告编号: GE-2000-3-014, 2000.